广义布里渊区中一维非厄米模型的拓扑相变

韩炎桢，种诗尧，杜晶晶，孟令辉，刘建晓

（衡水学院，河北 衡水 053010）

摘　要　在非厄米体系中，因为存在非厄米趋肤效应，这使得传统的布洛赫哈密顿量不能准确刻画非厄米系统的拓扑性质，通过引入广义布里渊区和非布洛赫能带理论，能够更准确地描述非厄米趋肤效应。本研究的目的是基于广义布里渊区理论，深入探讨一维非厄米模型的拓扑相变行为。通过构建具体的非厄米 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）模型，并分析其在不同边界条件下的能谱和本征态，揭示非厄米参数对拓扑相变和非厄米趋肤效应的影响，并在广义布里渊区中得到了拓扑相变的严格解。

关键词　广义布里渊区；非厄米 SSH 模型；拓扑相变

基金项目：河北省教育厅科学研究项目：非厄米系统安德森局域化的拓扑效应（No.QN2023056）；表面等离极化激元自旋流密度与相关光子学特性研究（No.BJK2023016）；衡水学院高层次人才科研启动基金项目：非厄米量子系统的拓扑态理论研究（No.2022GC10）；有关Parity-time对称表面等离极化激元及自旋流密度的研究（No.2022GC07）。

中图分类号：O4　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097-3365(2024)10-0001-03

1　研究背景

随着量子物理学的深入发展，非厄米体系因其独特的物理性质引起了广泛的关注，如复能谱 [1]、非正交本征矢 [2]、奇异点 [3] 和非厄米趋肤效应等 [4]。非厄米系统通常包含增益或损耗机制，或存在非互易耦合，这些特性使得非厄米体系展现出与厄米体系截然不同的物理现象 [5]。特别是在开边界条件下，非厄米系统的波函数常常展现出局域化特性，表现为在开放边界条件下，所有本征态都局域在系统的一侧边界上，即非厄米趋肤效应。

由于非厄米趋肤效应的存在，开放边界条件下的本征能量与周期边界条件下存在巨大差异，传统的体—边对应关系失效 [6]。传统固体物理中常使用周期边界条件定义的布里渊区来研究系统性质。然而，对于非厄米系统，边界条件对其能谱和本征态的影响无法简单视为微扰 [7]。为了准确描述非厄米系统，布里渊区的概念被推广为广义布里渊区 [8]。在广义布里渊区上定义的非布洛赫拓扑不变量能够忠实刻画非厄米体系中拓扑边界态的存在从而建立了非布洛赫体—边对应关系。广义布里渊区作为能量复平面上的闭合曲线，其轨迹的不确定性使得非厄米系统的拓扑分析变得复杂而有趣。

本文旨在探讨一维非厄米模型在广义布里渊区中的拓扑相变行为，基于非厄米 SSH 模型，通过开放边界条件下系统的能谱分析，展示非厄米趋肤效应如何影响系统的拓扑性质，以及如何在广义布里渊区中得到拓扑相变点的严格解 [9-10]。

2　理论模型

考虑一维的非厄米 SSH 模型，如图 1 所示，实空间中一维二聚化晶格的哈密顿量为：

$$H_{\mathrm{SSH}}=\sum_{n,\sigma}\left[t_1 a_{n,\sigma}^{\dagger} b_{n,\sigma}+t_1 b_{n,\sigma}^{\dagger} a_{n,\sigma}+(t_2-\delta)\, a_{n+1,\sigma}^{\dagger} b_{n,\sigma}+(t_2+\delta)\, b_{n,\sigma}^{\dagger} a_{n+1,\sigma}\right] \tag{1}$$

引入了 δ 后哈密顿量产生了的非厄米特性，δ 改变了晶胞中左右方向的不同跳跃强度。在周期性边界条件下采用傅立叶变换，哈密顿量 H 可以很容易地改写为 $H=\sum_k \psi_k^{\dagger} h_k \psi_k$，其中 $\psi_k^{\dagger}=(a_k, b_k)^{\dagger}$，且：

$$h_k=\begin{pmatrix} 0 & t_1+(t_2-\delta)e^{-ik} \\ t_1+(t_2+\delta)e^{ik} & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

哈密顿量 $\mathrm{h_k}$ 满足手征对称性 $\mathrm{Sh_k}S^{-1}=-\mathrm{h_k}$，其中 $S=\sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。

3　拓扑相变

首先在传统布里渊区中进行分析，将动量空间的哈密顿量 h_k 对角化，可得到本征值 $E_k=\pm\sqrt{t_1+(t_2-\delta)e^{-ik}}\sqrt{t_1+(t_2+\delta)e^{ik}}$。若 $E_k=0$，则 $t_1=-t_2\pm\delta\,(\mathrm{k}=0)$ 或 $t_1=t_2\pm\delta\,(\mathrm{k}=\pi)$，此即能隙闭合点。

开放边界谱与周期性边界谱结果明显不同，如图 2(a) 所示，当 $t_2=1$，$\delta=0.3$ 时，相变点位于 $t_1\approx\pm0.95$，图 2(b) 对应于图 2(a) 的零能态对的数量 N 是 0 和 1。由此可知，这与 $E_k=0$ 时得到的解析结果不相符。因此，h_k 的拓扑结构无法确定零模。如图 3 所示，零模和 4

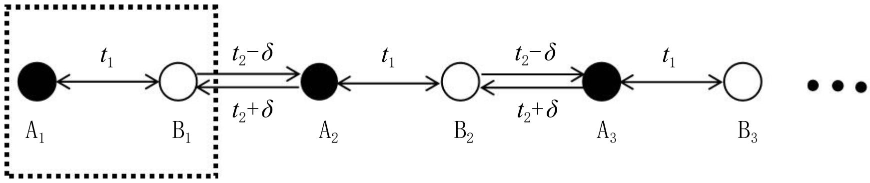

图 1　非厄米模型

个随机选择的体本征态显示所有体本征态都位于左侧边界附近，说明了存在非厄米趋肤效应。

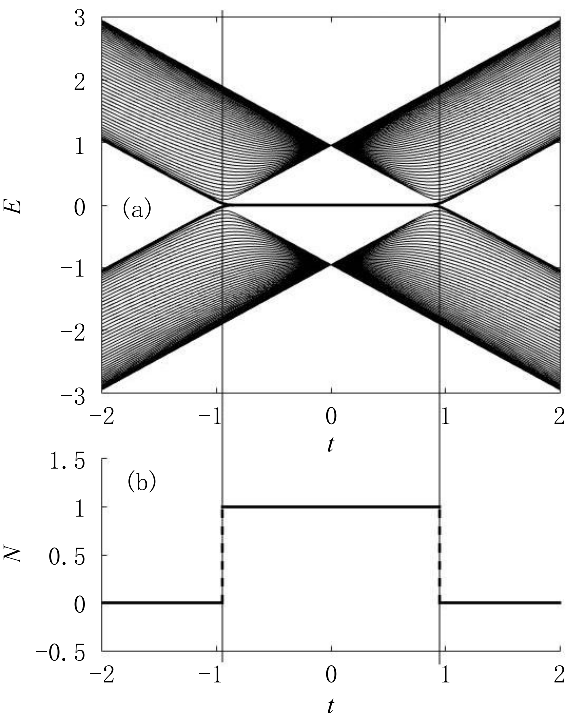

图 2　能谱图及对应的零能态

（注：(a) 开放边界条件下公式中 h_k 的能谱图；(b) 对应于 (a) 的零能态对的数量 N 是 0 和 1。链长 L=50，其他参数 t_2=1，δ=0.3。）

接下来，为了获得拓扑相位，将从广义布里渊区的角度进行分析。假设系统的长度为 L，开边界条件下的实空间薛定谔方程为：

$$\begin{aligned}(t_2-\delta)\psi_{n-1,B}+t_1\psi_{n,B}&=E\psi_{n,A}\\ t_1\psi_{n,A}+(t_2+\delta)\psi_{n+1,A}&=E\psi_{n,B}\end{aligned}\tag{3}$$

假设 $|\psi\rangle=\sum_j|\phi^{(j)}\rangle$，其中每个 $|\phi^{(j)}\rangle$ 都呈指数形式，即 $(\phi_{n,A},\phi_{n,B})=\eta^n(\phi_A,\phi_B)$，它满足：

$$\begin{aligned}[t_1+(t_2-\delta)\eta^{-1}]\phi_B&=E\phi_A\\ [t_1+(t_2+\delta)\eta]\phi_A&=E\phi_B\end{aligned}\tag{4}$$

在此基础上，可以得到非厄米 SSH 模型两个子空间的特征方程：

$$[t_1+(t_2-\delta)\eta^{-1}][t_1+(t_2+\delta)\eta]=E^2\tag{5}$$

所以可以得到 $\eta_{1,2}(E)=\dfrac{-\mu\pm\sqrt{\mu^2-4t_1^2(t_2-\delta)(t_2+\delta)}}{2t_1(t_2+\delta)}$，其中 $\mu=t_1^2+t_2^2-\delta^2-E^2$。当 $E\to 0$ 时，$\eta_{1,2}(E\to 0)=-\dfrac{t_2-\delta}{t_1}$ 或 $-\dfrac{t_1}{t_2+\delta}$，并且满足：

$$\eta_1\eta_2=\frac{t_2-\delta}{t_2+\delta}\tag{6}$$

实空间中格点上的波函数分量满足：

$$\phi_A^{(j)}=\frac{E}{t_1+(t_2+\delta)\eta_j}\phi_B^{(j)},\quad \phi_B^{(j)}=\frac{E}{t_1(t_2-\delta)\eta_j^{-1}}\phi_A^{(j)}\tag{7}$$

特征方程 η 的两个解表明系统中存在两个独立传播的呈指数形式的波函数，并通过某种形式的线性叠加满足相应的边界条件。因此，实空间波函数的一般

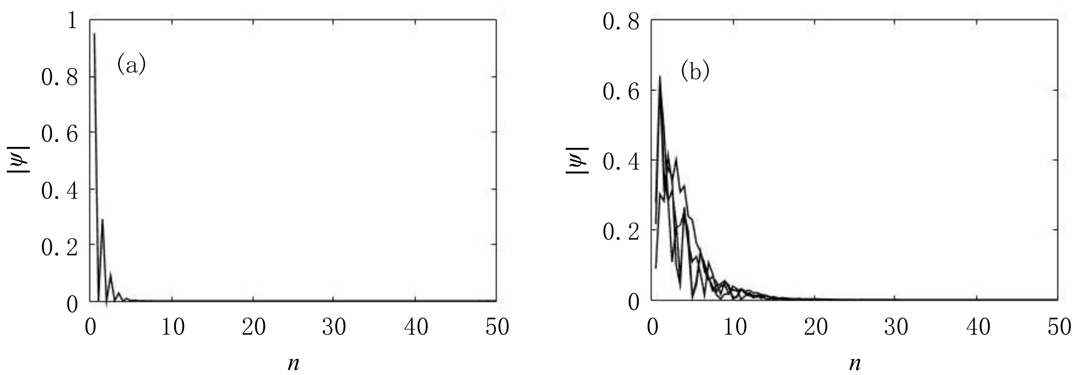

图 3　本征态轮廓图

（注：(a) 零模；(b) 四个随机选择的体本征态。）

形式可以表示为：

$$\begin{pmatrix}\psi_{n,A}\\ \psi_{n,B}\end{pmatrix} = \eta_1^n \begin{pmatrix}\phi_A^{(1)}\\ \phi_B^{(1)}\end{pmatrix} + \eta_2^n \begin{pmatrix}\phi_A^{(2)}\\ \phi_B^{(2)}\end{pmatrix} \tag{8}$$

对于一个长链的光谱系统，体能态需要满足 $|\eta_1|=|\eta_2|$，根据公式（7）可得：

$$|\eta_1| = r = \sqrt{\left|\frac{t_2-\delta}{t_2+\delta}\right|} \tag{9}$$

当 r<1 时，所有本征态都位于链的左端（如图 3）。

当 $|\eta_1|=|\eta_2|$，且 $E\to 0$ 时可以得到 $\left|\frac{t_2-\delta}{t_1}\right| = \left|\frac{t_1}{t_2+\delta}\right|$，所以：

$$t_1 = \pm\sqrt{t_2^2-\delta^2} \tag{10}$$

在这两个点上，开放边界连续谱接触零能，实现拓扑跃迁，即拓扑相变点。根据公式（5），绘制图 4(a) (b) 中的 η-E 关系曲线，其中 $t_2=1$，$\delta=0.3$。图 4(a) 中 $t_1=0.8$，图 4(b) 中 $t_1=\sqrt{t_2^2-\delta^2}\approx 0.95$（在相变点附近），虚曲线代表 η_1，实曲线代表 η_2，两条曲线重合部分表明存在 $|\eta_1|=|\eta_2|$，这与体能谱有关。当 t_1 从 0.8 开始逐渐增大，图 4(a) 中两条曲线左侧交点会逐渐向左移动，直至 $t_1\approx 0.95$ 时汇聚于 $|\eta|$ 轴（图 4(b)）。如图 4(c) 复值 $|\eta_j|$ 形成一个闭环 C_η，由公式（9）可知，对于本模型来说，这是一个圆，即 C_η 广义布里渊区。在厄米的情况下，C_η 是一个单位圆（虚线）。

4 结束语

本文主要研究的是在广义布里渊区中一维非厄米模型的拓扑相变，通过在传统布里渊区中求解非厄米 SSH 模型的解析解，由于非厄米趋肤效应传统的体—边界效应失效。研究发现跳跃项可以调控拓扑相变，并将布里渊区推广到广义布里渊区，并在其中得到了拓扑相变点的严格解。这里提出的方法可以扩展到更新颖的非厄米系统。

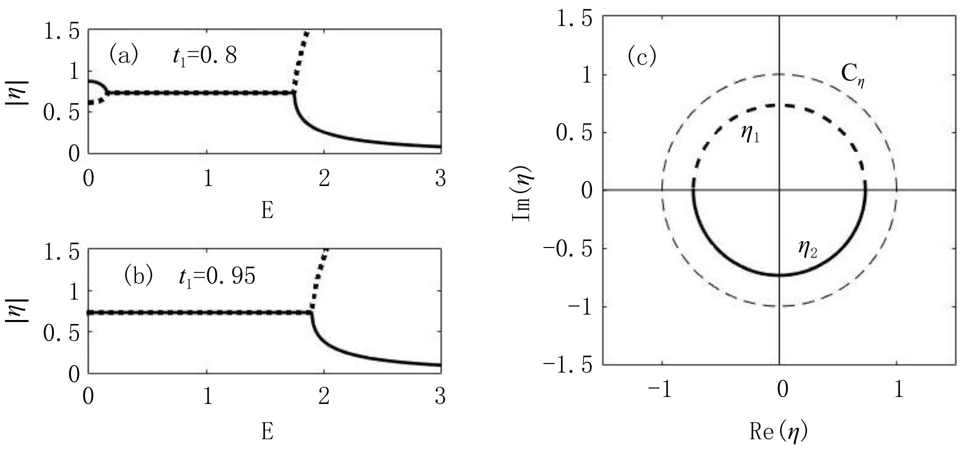

图 4　广义布里渊区的变化曲线图

（注：(a) $t_1=0.8$ 时的 η-E 关系曲线；(b) $t_1=0.95$ 时的 η-E 关系曲线；(c) η 值的闭合曲线。）

参考文献：

[1] Henri Menke, Moritz M. Hirschmann. Topological quantum wires with balanced gain and loss[J]. Physical Review B, 2017(95):174506.

[2] K. Flore, Kunst Elisabet Edvardsson, Jan Carl Budich, Emil J. Bergholtz, Biorthogonal bulk-boundary correspondence in non-hermitian systems[J]. Physical Review Letters,2018(121): 26808.

[3] C. Dembowski, B. Dietz, H.-D. Graf, H.L. Harney, A. Heine, W.D. Heiss, A. Richter, Encircling an exceptional point[J]. Physical Review E, 2004(69): 56216.

[4] Shunyu Yao, Zhong Wang, Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems[J]. Physical Review Letters, 2018(121): 86803.

[5] S. Longhi, Bloch oscillations in complex crystals with PT symmetry[J]. Physical Review Letters, 2009(103): 123601.

[6] Lee C H, Li L, Thomale R and Gong J, Unraveling non-Hermitian pumping: emergent spectral singularities and anomalous responses[J]. Physical Review B, 2020(102): 85151.

[7] Xiaoming Cai, Localization and topological phase transitions in non-Hermitian aubry-andre-harper models with p-wave pairing[J]. Physical Review B, 2021(103): 214202.

[8] Zhang K, Yang Z and Fang C, Correspondence between winding numbers and skin modes in non-Hermitian systems[J]. Physical Review Letters, 2020(125): 126402.

[9] 吴洪. 周期性驱动诱导的新奇拓扑物态 [D]. 兰州 : 兰州大学 ,2023.

[10] 周孟悦. 非厄米拓扑保护的频率依赖单向放大及其超导量子电路实现 [D]. 武汉 : 华中科技大学 ,2022.